Aula 19

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema (Teorema Fundamental do Cálculo/Regra de Barrow):
Sejam $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua nos pontos duma curva em D_f parametrizada por um caminho seccionalmente regular γ e seja F uma função holomorfa sobre os pontos da curva tal que $F'(z) = f(z)$ nesses pontos.
Então, tem-se

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma F'(z)\,dz = F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)).$$

Em particular, se o caminho é fechado, tem-se que $\gamma(t_1) = \gamma(t_0)$ e

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma F'(z)dz = 0.$$

Exemplos:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2}\,dz = 0$$

Conjuntos Conexos

Definição: Um conjunto Ω diz-se **desconexo** se existem dois abertos A_1, A_2 tais que:

- $\Omega \subset A_1 \cup A_2$
- $\Omega \cap A_1 \neq \emptyset$ e $\Omega \cap A_2 \neq \emptyset$
- $(\Omega \cap A_1) \cap (\Omega \cap A_2) = \emptyset$

Um conjunto Ω diz-se **conexo por arcos** se, dados quasiquer dois pontos $z_1, z_2 \in \Omega$ existe um caminho com imagem contida em Ω que os une.

Teorema: Se f é contínua e Ω é conexo, então $f(\Omega)$ é conexo.

Proposição: Se um conjunto é conexo por arcos então é conexo.
Se um conjunto é aberto e conexo, então é conexo por arcos.

Teorema (Teorema da Independência do Caminho): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função contínua num domínio D_f aberto e conexo. Então as seguintes proposições são equivalentes entre si.

i) f tem primitiva em D_f, ou seja, uma função holomorfa $F : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo o $z \in D_f$.

ii) Para qualquer caminho fechado γ em D_f tem-se

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$$

iii) Se $z_0, z_1 \in D_f$ são quaisquer dois pontos e $\gamma, \tilde{\gamma}$ quaisquer dois caminhos em D_f, de z_0 para z_1, tem-se

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz.$$

Teorema de Cauchy

Teorema de Cauchy (Versão Básica): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa sobre os pontos de uma curva de Jordan $\Gamma \subset D_f$, assim como em **todos** os pontos do seu interior. Então

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Teorema da Deformação (Versão Básica): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa no domínio D_f e $\gamma, \tilde{\gamma}$ dois caminhos homotópicos em D_f. Então

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz.$$